CONCOURS 1997

Option : BCPST

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

PARTIE I

On désigne par $E = C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

A tout f dans E, on associe l'application $g = \Phi(f)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$g(0) = f(0)$, et pour tout réel x non nul : $g(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\, dt$.

1°) **a)** Vérifier que l'application g ainsi définie est un élément de E, ce qui permet d'envisager Φ comme une application de E vers E (pour cela, on pourra utiliser une primitive F de f).

b) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, justifier l'égalité $g(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(xu)\, du$.

Montrer que g est une application paire, et simplifier l'expression de g lorsque f est paire ou lorsque f est impaire.

2°) **a)** Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que Φ n'est pas injective, et préciser $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$. En utilisant une primitive F de f, montrer que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$, et préciser $g'(x)$.

d) Montrer que Φ n'est pas surjective.

3°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\ \mathrm{id}_E)$.

a) Soit f dans E, vérifiant $\Phi(f) = \lambda\ f$.

Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \lambda\, x\, f'(x) = (1 - \lambda)\, f(x).$$

b) En déduire l'expression de f(x) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire la forme possible de f selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

d) Conclure en précisant E_λ selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

4°) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$.
On suppose que f est développable en série entière (au voisinage de 0), et qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ ou $R = +\infty$ tels que :

$$\forall x \in]-R,R[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

le rayon de convergence de ce développement étant R.

a) En utilisant une primitive F de f, montrer que g est aussi développable en série entière sur]–R,R[, en précisant ce développement.

b) Donner un exemple où le rayon de convergence du développement en série entière de g est strictement supérieur à celui de f (c'est-à-dire R défini ci-dessus).

5°) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$.
Montrer que si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe, alors g admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on précisera. La réciproque est-elle vraie ?

6°) Soient f dans E, $g = \Phi(f)$, et T un réel strictement positif.
On suppose que f est T-périodique, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x).$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer g(n.T) en fonction de : $I = \int_0^T f(t)dt$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq T$, et soit m(x) la partie entière de $\frac{x}{T}$.

Exprimer g(x) en fonction de $\frac{T.m(x)}{x}\ g(T.m(x))$ et de deux intégrales, et majorer la valeur absolue de chacune de ces deux intégrales au moyen de $\int_0^T |f(t)|\,dt$.

c) En déduire : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ en fonction de I.

7°) Exemple 1 : Soit $f_1 = \cos$ (qui à tout réel t associe le cosinus de t), et $G = \Phi(f_1)$.

a) Expliciter G(x) pour tout réel x.

b) Préciser : $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ et vérifier le résultat de 6°, c. avec $T = 2\pi$.

8°) Exemple 2 : Soit $f_2 = |\sin|$ (qui à tout réel t associe |sin(t)|), et $H = \Phi(f_2)$.

Grâce à 6°, c. avec $T = \pi$, déterminer un équivalent simple de $\int_0^x |\sin(t)|\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$, en fonction de x.

9°) Exemple 3 : Soit $f_3 = \exp$ (qui à tout réel t associe e^t), et $S = \Phi(f_3)$.

a) Expliciter S(x) pour tout réel x.

b) Déterminer le développement en série entière de S, en précisant son rayon de convergence.

c) Donner le tableau des variations de S et de $\frac{1}{S}$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE II

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k : t \mapsto t^k$ (en particulier $p_0 : t \mapsto 1$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de E constitué par les applications polynomiales de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle que $\mathcal{B}_n = (p_0,\ldots,p_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

10°) Montrer que si f est dans $\mathcal{P}_n$, alors $g = \Phi(f)$ est aussi dans $\mathcal{P}_n$.

On notera ainsi Φ_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ induit par Φ, qui à tout $f \in \mathcal{P}_n$ associe : $g = \Phi(f) = \Phi_n(f)$ dans $\mathcal{P}_n$.

11°) Ecrire la matrice de Φ_n relativement à la base $\mathcal{B}_n$: on distinguera les cas où n est pair de la forme $n = 2m$, et n impair de la forme $n = 2m+1$.

12°) Préciser les valeurs propres et les différents sous-espaces propres de Φ_n : on distinguera à nouveau les cas n pair ($n = 2m$), et n impair ($n = 2m+1$).

13°) On suppose $n = 2$.

a) Soit Ψ un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$.

Montrer que : $\Psi \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Psi$ si et seulement si la matrice de Ψ relativement à la base $\mathcal{B}_2$ est diagonale.

b) En déduire tous les endomorphismes Ψ de $\mathcal{P}_2$ tels que : $\Psi \circ \Psi = \Phi_2$, grâce à leur matrice relativement à la base $\mathcal{B}_2$.

PARTIE III

Soit f dans E, supposée paire (c'est-à-dire f(x) = f(–x) pour tout réel x) et g = Φ(f).

On suppose dans cette partie que f est la densité d'une certaine variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, et dont la fonction de répartition est notée **F**.

14°) **a)** Exprimer g(x), pour tout réel x non nul, en fonction de **F**(x).

b) Justifier l'existence d'un unique réel M(f) ≥ 0, et d'un réel c ≥ 0 tels que : g(c) = M(f) et g(x) ≤ M(f) pour tout réel x.

15°) **Exemple 4** : On suppose dans cette question que f est définie pour tout réel t par :

f(t) = 0 si t < –1 ou si t > 1 ; f(t) = 1 + t si t ∈ [–1,0] ; f(t) = 1 – t si t ∈ [0,1].

a) Calculer l'espérance mathématique de X.

b) Expliciter g et déterminer M(f).

c) Déterminer une densité de la variable aléatoire réelle Y = g(X), et étudier si elle possède une espérance.

16°) **Exemple 5** : On suppose ici que : $f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$, pour tout t ∈ ℝ.

a) Calculer l'espérance de X, après avoir justifié son existence.

b) Expliciter g et déterminer M(f).

17°) **Exemple 6** : On suppose ici que : $f(t) = a.|t|.e^{-t^2}$ pour tout réel t.

a) Calculer a et l'espérance mathématique de X.

b) Expliciter g.

c) Calculer une valeur approchée de M(f) à 0,1 près.

18°) D'une façon générale, justifier que g ne peut être la densité d'une variable aléatoire réelle.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail